ALINA HERGHELEGIU

SINTEZE MATEMATICE V-VII

Editura MAGIC PRINT
Onești, 2020

NUMERE NATURALE

Orice număr natural de două cifre sau mai multe se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1000, etc.).

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b$$

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

$$\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$$

Ex: $53 = 5 \cdot 10 + 3$

$153 = 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3$

Numerele naturale scrise în ordinea 0, 1, 2, 3,…, $n, n+1$, ... formează șirul numerelor naturale.

Obs: Fie numărul natural n → succesorul său este $n + 1$

→ predecesorul său este $n - 1$

Obs: De la 1 la n sunt n numere naturale ; iar de la 0 la n sunt $n + 1$ numere naturale.

$0, 1, 2, \dots, n \rightarrow (n-1) + 1 = n$ numere naturale

Forma generală a unui număr natural par : $\boldsymbol{2n}$; $\boldsymbol{n \epsilon N}$; iar forma generală a unui număr impar: $\boldsymbol{2n + 1}$; $\boldsymbol{n \epsilon N}$

Cifre romane

Simbol	Valoare
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

- Scrierea se face de la stânga la dreapta.
- Simbolurile I, X, C pot fi consecutive de maximum trei ori, iar V, L, D doar o dată.
- Orice semn pus la dreapta altuia de valoare mai mare sau egală cu el, se adună.

Ex:

$$\boldsymbol{XIII = 10 + 3 = 13}$$

- Dacă un simbol mic se află în fața unui simbol mare, atunci cel mic se scade din cel mare. În acest caz, în fața unui simbol mare se poate află doar un singur simbol cu valoare mai mică.

Ex:

$$\boldsymbol{XCI = 100 - 10 + 1 = 91}$$

- Orice cifră, sau grup de cifre, subliniată superior cu o linie este multiplicată de 1000 ori.

Ex:

$$\bar{X} = 10000$$

Aplicații:

1. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3ab5}$, cu $a + b = 6$.
2. Scrieți toate numerele de forma $\overline{3xy} < 323$.
3. Determinați x știind că $\overline{35x} + 218 = 570$.
4. Determinați a știind că $\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 123$.
5. Aflați câte numere naturale se găsesc în următoarele șiruri:
   a) $0, 2, 4, 6, \dots, 998$
   b) $15, 16, \dots, 2019$
   c) $11, 22, 33, \dots, 198$
   d) $1, 6, 11, \dots, 505$
6. Scrieți următoarele trei numere naturale:
   a) $14, 28, 42, \dots$
   b) $1, 5, 9, \dots$
   c) $9, 12, 15, \dots$
7. Scrieți cu cifre romane numerele: $8, 111, 2020, 3049$
8. Scrieți cu cifre arabe numerele : $XXII, LX, MCM, \overline{XCV}$.
9. Fie șirul : $1, 5, 9, \dots$
   a) Determinați al 12- lea termen al șirului.
   b) Determinați al 2019- lea termen al șirului.
10. Fie șirul $1, 10, 19, \dots$
    a) Determinați al 10- lea termen al șirului.
    b) Verificați dacă numărul 999 este termen al șirului.

TEST

1. Scrieți cu cifre romane : 222.
2. Scrieți cu cifre arabe: $MDCCCXXVIII$.
3. Scrieți predecesorul și succesorul numărului 8959.
4. Stabiliți câte numere naturale sunt cuprinse între 1215 și 1288.
5. Aflați cel mai mic număr natural de forma $\overline{a3b}$, $a \neq b$ și $a < b$.
6. Determinați toate numerele de forma $\overline{ab}$ știind că $\overline{2ab} + \overline{2ba} = 477$.
7. Aflați numărul cifrelor folosite pentru numerotarea unei cărți cu 99 pagini.
8. Aflați cel mai mare număr natural de patru cifre distincte care are cifra unităților dublul cifrei miilor.
9. Scrieți cel mai mare număr natural de trei cifre diferite și care are suma cifrelor 15.

OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

1) Adunarea numerelor naturale

$$\boldsymbol{a+b=c}$$

a și b = termenii sumei
c = suma

Proprietăți:
1. Comutativitatea : $a+b=b+a$, oricare ar fi a si b numere naturale
2. Asociativitatea: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi a, b și c numere naturale
3. Elementul neutru: 0 este elementul neutru pentru adunarea numerelor naturale $a+0=\ 0+a=a$, oricare ar fi a număr natural.

2) Scăderea numerelor naturale

$$\boldsymbol{a-b=d}$$

a =descăzut, b =scăzător
c = diferență

Obs: Scăderea nu este asociativă, nu este comutativă, iar numărul 0 nu este element neutru.

3) Înmulțirea numerelor naturale

$$\boldsymbol{a\cdot b=p}$$

a și b= facori
p = produsul

Proprietăți:

1.Comutativitatea: $a\cdot b=b\cdot a$, oricare ar fi a și b numere naturale.
2. Asociativitatea: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, oricare ar fi a, b și c numere naturale.
3. Elementul neutru: $a\cdot 1=1\cdot a=a$, oricare ar fi a număr natural.
4. Distributivitatea față de adunare și scadere: $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$, oricare ar fi a, b și c numere naturale.

Factorul comun

$$a\cdot m+a\cdot n=a\cdot(m+n)$$

Spunem că am scos factor comun pe a.

4) **Împărțirea numerelor naturale**

$\boldsymbol{d = î \cdot c + r, r < î}$ **- Teorema împărțirii cu rest**

d= deîmpărțit

î = împărțitor

c =cât

r = rest

5) **Puterea cu exponent natural a unui număr natural**

$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,factori}}$, oricare ar fi a număr natural

Reguli de calcul cu radicali:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
5. $a^n : b^n = (a : b)^n$
6. $a^0 = 1$
7. $a^1 = a$, oricare ar fi a, b, m, n numere naturale nenule

PĂTRATE PERFECTE. CUBURI PERFECTE

Pătrat perfect= număr natural obținut prin ridicarea la puterea a doua a unui număr natural.

Obs: Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi $0, 1, 4, 5, 6$ *sau* 9.

Un număr natural nu este pătrat perfect dacă se termină cu una dintre cifrele: $2, 3, 7$ *sau* 8.

Cub perfect= număr natural obținut prin ridicarea la puterea a treia a unui număr natural.

6) **Ordinea efectuării operațiilor**

- **Adunarea si scăderea numerelor naturale sunt operații de ordinul I.**
- **Înmulțirea și împărțirea numerelor naturale sunt operații de ordinul II.**
- **Ridicarea la putere operație de ordinul III.**

În calcule, ordinea efectuării operațiilor este următoarea:

- Se efectuează întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și în final cele de ordinul I.
- Dacă se utilizează paranteze, atunci mai întâi se efectuează calculele din paranteza rotundă, apoi cel din paranteza pătrată și în final cele din acoladă.

SUMA GAUSS

$$\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

Aplicații :

1. a) Știind că $x+2y=33$, calculați $x+2y-11$.

   b)Știind că $x+y+z=41$, calculați $3x+3y+3z$.

   c)Știind că $3x+2y+20=200$, calculați $6x+4y-100$.

2. a) Știind că $a+2b=12$ și $a+b=6$, aflați b.

   b)Știind că a+2b+c=22 și $a+b=11$, aflați $b+c$.

3. Dacă $a=5$, determinați produsul $p=(17-a)\cdot(15-a)\cdot(13-a)\cdot\ldots\cdot(5-a)$.

4. Calculați:

   a) $21+21\cdot2-21\cdot3$

   b) $2019+2019\cdot2017-2018\cdot2-2017$

   c) $15\cdot72-15\cdot18+(41\cdot42-41\cdot41)\cdot15$

5) Dacă $a + b = 12$ și $c = 5$, calculați $c \cdot (a + b)$.

6) Aflați numerele naturale a și b știind că $(a - 2) \cdot (b + 3) = 7$.

7) Aflați cel mai mic număr natural nenul care împărțit la 23 dă restul 11 și câtul diferit de zero.

8) Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 7 dau câtul egal cu restul.

9) Suma a două numere naturale este 16. Dacă împărțim pe unul la celălalt obținem câtul 2 și restul 1. Aflați numerele.

10) Diferența a două numere naturale este 133. Dacă împărțim pe cel mare la cel mic obținem câtul 7 și restul 1. Aflați numerele.

11) Suma a trei numere naturale este 2019. Dacă împărțim pe primul la al doilea obținem câtul 5 și restul 2, iar dacă împărțim pe al treilea la al doilea obținem câtul 3 și restul 1. Aflați numerele.

12) Calculați:

a) $64 + 2^4 + 5^2 - 6^1$

b) $[8^{1001} - (2^{13})^7 + 5^{2019}]^0$

c) $3^2 + 4^2 + 5^2 + 2 \cdot \left[2^{2^2}\right] + 125 \cdot 16 : 250$

d) $1^{2020} + 0^{2020} - 4^{0^{2020}} + (3^2)^6 : (3^3)^4$

13. Aflați numărul natural n pentru care următoarele egalități sunt adevărate:

a) $7^{2n-1} = 7^3$ b) $5^{2n+1} + 5^{2n} + 5^{2n+2} = 31 \cdot 5^{10}$

c) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{15} = 3^{5n-5}$ d) $3^n \cdot 5^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 5^n - 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}$

14) Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) 2020^{2020} b) $3 \cdot 5^{67} - 5^{66} \cdot 2 - 4 \cdot 5^{66}$ c) $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 24)$

15) Arătați că următoarele numere sunt cuburi perfecte:

a) 14^{2022} b) $5^{103} - 4 \cdot 5^{102}$ c) $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 64) - 4^3$

16) Aflați ultima cifră a numărului

$a = 3^{2021} + 5^{2021} + 6^{2021} - 4^{2021} - 9^{2021}$

17) Calculați:

a) $S_1 = 91 + 92 + \cdots + 1001$

b) $S_2 = 105 + 210 + 315 + \cdots + 1155$

c) $S_3 = 2 + 7 + 12 + \cdots + 507$

d) $S_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2021}$

e) $S_5 = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^{2021}$

TEST

1. Aflați diferența dintre cel mai mare număr natrual de patru cifre distincte și cel mai mic număr natural de patru cifre distincte.
2. Dacă $a + b = 6$ și $c = 10$, atunci calculați $a \cdot c + b \cdot c$.
3. Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 4 dau câtul 2.
4. Aflați restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 25 + 100$ la numărul 21.
5. Arătați că $11^{20} + 11^{21} + 11^{22} = 11^{20} \cdot 133$
6. Aflați ultima cifră a numărului $a = 131^{2019} + 122^{2019} + 137^{2019}$
7. Arătați că numărul $a = 9^{2015} - 9^{2014} \cdot 8 - 9^{2013} \cdot 8 - \cdots - 8$ este pătrat perfect.
8. Calculați : $\{[(3^{17} \cdot 2^{15} \cdot 7^5) : (2^{15} \cdot 3^{16} \cdot 7^4) - 225 : 15] : 225 + 12 : 3\} \cdot 2019$
9. Aflați suma cuburilor perfecte cuprinse între 100 și 410.

SCRIEREA ÎN BAZA 10; SCRIEREA ÎN BAZA 2

- $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$
- $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$
- $\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$

În sistemul de numerație zecimal se folosesc cifrele: $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

În sistemul binar dec numerație se folosesc cifrele: 0 și 1.

Pentru a reprezenta un număr din sistemul zecimal binar, facem un șir de împărțiri succesive la 2 astfel: împărțim numărul la 2; împărțim primul cât la 2; împărțim al doilea cât la 2, etc. până obținem câtul 1. Ultimul cât obținut reprezintă prima cifră a numărului scris în baza 2; iar celelalte cifre sunt resturile obținute, scrise de la sfârșit spre început, astfel încât ultima cifră este restul obținut la prima împărțire. La împărțirile exacte restul este 0.

Ex:

33	2				
1	16	2			
	0	8	2		
		0	4	2	
			0	2	2
				0	1

$33 = 100001_{(2)}$

$$100001_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 33$$

Am transformat numărul din sistemul binar în sistemul zecimal.